

KONKURS

KONKURS

ROZMAITOŚCI MATEMATYCZNE



ELEKTRONICZNE ZAKŁADY NAUKOWE

ROZWIĄZANIA LISTA 1 (październik'2013)

1. Jedno półkole, na które rozcięto koło, przyjęto za powierzchnię boczną stożka. Czy z drugiego półkole można wyciąć podstawę dla tego stożka?

Odp. Tak

2. Uzasadnij, że dla każdego $x > 3$ wyrażenie $x^3 - 3x^2 - x + 3$ jest dodatnie.

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(x^2 - 1) = (x - 3)(x + 1)(x - 1)$$

Jeżeli $x > 3$, to $x - 3 > 0 \wedge x + 1 > 0 \wedge x - 1 > 0$, zatem $(x - 3)(x + 1)(x - 1) > 0$.

3. Autobus jechał z miejscowości A do miejscowości B ze średnią prędkością $50 \frac{km}{h}$, a w drodze powrotnej ze średnią

prędkością $30 \frac{km}{h}$. Jaką średnią prędkość osiągnął autobus na całej trasie?

x - długość drogi AB

$\frac{x}{50}$ - czas, w jakim autobus przejedzie z A do B z prędkością $50 \frac{km}{h}$

$\frac{x}{30}$ - czas, w jakim autobus przejedzie z A do B z prędkością $30 \frac{km}{h}$

Całą trasę $2x$ autobus przebył w czasie $\frac{x}{50} + \frac{x}{30}$, zatem średnia prędkość autobusu jest równa: $\frac{2x}{\frac{x}{50} + \frac{x}{30}} = \frac{300x}{8x} = 37,5$

4. Wyznacz liczbę dwucyfrową równą sumie sześciastu cyfry dziesiątek i kwadratu liczby jedności.

$10a + b$ - szukana liczba dwucyfrowa, $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$10a + b = a^3 + b^2$, $a(10 - a^2) = b(b - 1)$, prawa strona ostatniej równości jest liczbą nieujemną i parzystą, lewa strona przyjmuje wartości nieujemne i parzyste dla $a \in \{2\}$, zatem $a = 2$ i $b = 4$.

5. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c . Wykaż, że: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} =$$

$$= \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) =$$

$$= 3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) < 2, \text{ bo } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$$